数学新星网 ※ 教师专栏
www.nsmath.cn/jszl

第 21 届中国西部数学邀请赛试题解析

佘毅阳[1]　邹瑾[2]　王广廷[1]

(1. 上海市上海中学, 200237; 2. 高思教育, 100083)

2026 年第 23 届中国西部数学邀请赛于 8 月 4 日至 8 月 9 日在成都教科院附中 (成都高新中学) 举行. 本文给出此次邀请赛的试题解答与评析. 不当之处, 敬请指正.

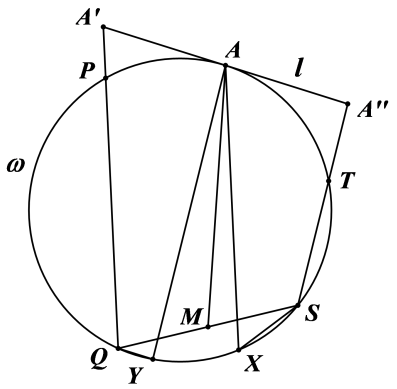
I. 试 题

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为正实数, 满足对任意 $1 \leq i \leq n$, 有 $\frac{1}{a_i} - \frac{1}{b_i} \leq 1$. 证明:

$$\frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - \frac{1}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq 1.$$

(广州大学　罗振华 供题)

2. 如图, 过圆 ω 上一点 A 作切线 ℓ, 在 ℓ 上取关于 A 对称的两点 A'、A''. 过 A' 作圆 ω 的一条割线与圆 ω 交于两点 P、Q, 过 A'' 作圆 ω 的一条割线与圆 ω 交于两点 S、T. 过 A 作直线 PQ、ST 的平行线, 分别与圆 ω 再次交于点 X、Y. 点 M 为线段 QS 的中点. 证明: AM、QY、SX 三线共点.



(吉大附中 石泽晖 供题)

修订日期: 2026-10-04.

3. 设集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$, f 是一个 S 到 S 的一一映射, 满足: 对任意正整数 $a,b\in S$, 若 $a\mid b$, 则 $f(a)\mid f(b)$. 证明: 若正整数 $k\in S$ 的素因子均小于 $\sqrt{n}$, 则 $f(k)=k$.

(北京大学学生 黄嘉俊 供题)

4. 给定正偶数 n, 设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$. 对 $1\leq i,j\leq n$, 记

$$D_{i,j}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max\{x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+j-1}\}-\min\{x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+j-1}\},$$

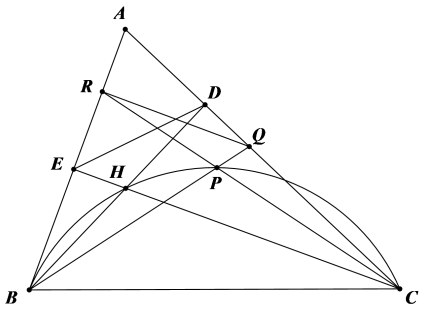
其中 $x_{n+k}=x_k$, $k=1,2,\cdots,n-1$. 求

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}D_{i,j}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的最小值.

(湖南师范大学 羊明亮 供题)

5. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H, B 到 AC 的垂足为 D, C 到 AB 的垂足为 E, $\triangle ABC$ 内异于 H 的点 P 在 $\triangle BHC$ 的外接圆上, 直线 BP 与 AC 交于点 Q, 直线 CP 与 AB 交于点 R. 证明: DE 平分线段 QR.



(华东师范大学 李震之 供题)

6. 设复数 z_1,z_2,z_3,z_4 满足

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0,\quad |z_i-\overline{z_j}|\leq 1\ (1\leq i,j\leq 4).$$

求 $|\sum\limits_{1\leq i<j\leq 4}z_iz_j|$ 的最大值.

(上海市上海中学 余毅阳 供题)

7. 给定正整数 n. 在无限大的方格表上有 n^2 个方格, 两两没有公共顶点. 求与它们中至少一个有公共顶点的小方格 (不包括这 n^2 个) 的个数的最小值.

(上海市上海中学 周天佑 供题)

8. 求最小的正整数 m, 使得存在由 m 个有序三元组 (i,j,k) 组成的集合 F, 同时满足以下条件:

(i) 对任意 $(i,j,k)\in F,\ i,j,k\in\{1,2,\cdots,100\}$ 且互不相同;

(ii) 对任意 100 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$, 若对所有 $(i,j,k)\in F$, 均有 $a_i\mid a_j+a_k$, 则 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 中至少有 99 个相等.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

Ⅱ. 解答与评注

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为正实数, 满足对任意 $1\leq i\leq n$, 有 $\frac{1}{a_i}-\frac{1}{b_i}\leq 1$. 证明:

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-\frac{1}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leq 1.$$

证明 由 $\frac{1}{a_i}-\frac{1}{b_i}\leq 1$, 可知 $b_i-a_i\leq a_ib_i$. 将此式对 $1\leq i\leq n$ 的所有 i 作累和, 可得,

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\leq\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

于是,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}b_i-\sum_{i=1}^{n}a_i&=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\\&\leq\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\\&\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right).\end{aligned}$$

将不等式两边同时除以 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)$, 可得,

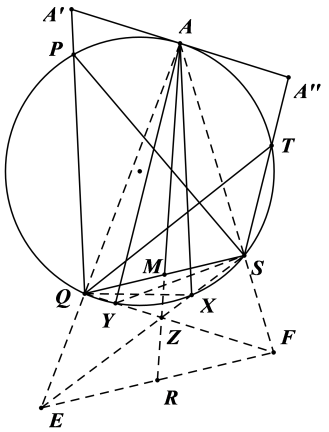
$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-\frac{1}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leq 1.$$

证毕. □

评注 这是一道较为简单的代数问题, 得分率为 96.25%, 很多手段都可以证出此题. 本文给出的解答将题设条件变形后求和, 再利用 $\sum a_ib_i\leq\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right)$ 得到结论, 思路直接且计算量较小.

2. 如图, 过圆 ω 上一点 A 作切线 ℓ, 在 ℓ 上取关于 A 对称的两点 A'、A''. 过 A' 作圆 ω 的一条割线与圆 ω 交于两点 P、Q, 过 A'' 作圆 ω 的一条割线与圆 ω 交于两

点 S、T. 过 A 作直线 PQ、ST 的平行线, 分别与圆 ω 再次交于点 X、Y. 点 M 为线段 QS 的中点. 证明: AM、QY、SX 三线共点.



证明 设直线 QY 与直线 AS 交于点 F, 直线 SX 与直线 AQ 交于点 E, 直线 QF 与直线 SE 交于点 Z. 连接 QX 与 SY. 并记线段 EF 的中点为 R.

欲证 AM、QY、SX 三线共点, 只需证 A、M、Z 三点共线.

由 AA' 与圆 ω 相切, 可知 $\angle A'AQ = \angle QXA$. 由 $A'Q \parallel AX$, 可知 $\angle A'QA = \angle QAX$. 于是, $\triangle A'QA \backsim \triangle QAX$, 从而可得, $\frac{A'A}{QX} = \frac{QA}{AX}$, 即 $AA' = \frac{QX\cdot AQ}{AX}$. 同理可得, $AA'' = \frac{SY\cdot AS}{AY}$. 结合题目条件 $AA' = AA''$, 可得

$$\frac{AY\cdot AQ}{SY} = \frac{AX\cdot AS}{QX}.$$

由 A, Q, Y, S 四点共圆, 可知 $\angle QAY = \angle QSY$. 从而,

$$\frac{AF}{FS} = \frac{S_{\triangle QAY}}{S_{\triangle QSY}} = \frac{\frac{1}{2}AQ\cdot AY\cdot \sin\angle QAY}{\frac{1}{2}SQ\cdot SY\cdot \sin\angle QSY} = \frac{AY\cdot AQ}{SY\cdot SQ}.$$

同理可得,

$$\frac{AE}{EQ} = \frac{AX\cdot AS}{QX\cdot QS}.$$

于是,

$$\frac{AF}{FS} = \frac{AY\cdot AQ}{SY\cdot SQ} = \frac{AX\cdot AS}{QX\cdot QS} = \frac{AE}{EQ}.$$

从而 $EF \parallel QS$. 熟知, 在梯形 $QEFS$ 中, 两条对角线交点 Z 与两条腰所在直线的交点 A 的连线经过两条底边的中点, 即 A、M、Z、R 四点共线, 特别的, A、M、Z 三点共线, 从而 AM、QY、SX三线共点. □

评注 这是一道中等偏易的平面几何问题, 得分率为 70.34%. 本文给出的解答通过引入点 E, F, Z, 将三线共点问题转化为共线问题, 再利用切线与圆周角得到相似三角形, 并结合面积比推出 $EF \parallel QS$, 最后利用梯形中的共线性质完成证明. 其中, 如何将题目中的共点关系转化为较容易处理的比例关系, 是解决本题的关键.

3. 设集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$, f 是一个 S 到 S 的一一映射, 满足: 对任意正整数 $a,b\in S$, 若 $a\mid b$, 则 $f(a)\mid f(b)$. 证明: 若正整数 $k\in S$ 的素因子均小于 $\sqrt{n}$, 则 $f(k)=k$.

证明 先证明如下引理:

引理 对任意 $a,b\in S$, $f(a)\mid f(b)$ 成立当且仅当 $a\mid b$.

证明 由题目条件, 只需证明若 $f(a)\mid f(b)$, 则 $a\mid b$ 即可.

假设存在一对 $a,b\in S$ 使得 $f(a)\mid f(b)$ 且 $a\nmid b$. 考虑在所有满足 $x,y\in S$ 且 $x\mid y$ 的二元数对 (x,y), 可知这样的二元数对有限且个数确定. 而由 f 是一一映射, 故每一组 $a,b\in S$ 且 $a\mid b$ 的二元数对 (a,b) 都唯一确定一组 $(f(a),f(b))$, 同样满足 $f(a),f(b)\in S$ 且 $f(a)\mid f(b)$. 从而, 结合假设, 可知满足 $x,y\in S$ 且 $x\mid y$ 的二元数对 (x,y) 的个数比自身至少多 1, 这与其个数是有限的矛盾. 从而, 引理获证.

回到原题. 我们对 k 使用归纳法证明: 若 $k\in S$ 的素因子均小于 $\sqrt{n}$, 则 $f(k)=k$.

当 $k=1$ 时, 题目条件中取 $a=1$, $b=f^{-1}(1)$, 可知 $f(1)\mid 1$, 从而 $f(1)=1$.

若 $k<m$ 时命题均成立, 下证当 $k=m$ 时命题也成立.

事实上, 只需对 m 的素因子均小于 $\sqrt{n}$ 的 m 进行证明. 下面我们分三种情况进行证明:

情况 1: $m\le\sqrt{n}$.

由归纳假设, 对任意正整数 $k<m$, 均有 $f(k)=k$, 从而 $f(m)\ge m$. 在题目条件中取 $a=m$, $b=mt$ $(t=1,2,\cdots,[\frac{n}{m}])$, 可知 S 中至少有 $[\frac{n}{m}]$ 个数是 $f(m)$ 的倍数, 从而 $[\frac{n}{m}]\le[\frac{n}{f(m)}]$. 假设 $f(m)\ge m+1$, 可得

$$\left[\frac{n}{f(m)}\right]\le\left[\frac{n}{m+1}\right]\le\frac{n}{m+1},$$

而 $[\frac{n}{m}]\ge\frac{n}{m}-\frac{m-1}{m}$, 结合 $[\frac{n}{m}]\le[\frac{n}{f(m)}]$, 可知

$$\frac{n}{m}-\frac{m-1}{m}\le\frac{n}{m+1}.$$

整理后, 可得 $n\le m^2-1$, 与 $m\le\sqrt{n}$ 矛盾. 从而, $f(m)<m+1$, 即 $f(m)=m$.

情况 2: $m>\sqrt{n}$ 且 m 至少有两个不同素因子.

可设 $m=uv$, 其中 $(u,v)=1$ 且 $u,v>1$. 由归纳假设 $f(u)=u$ 且 $f(v)=v$.

一方面, 由题目条件, 可知 $f(u)\mid f(m)$ 且 $f(v)\mid f(m)$.从而 $u\mid f(m)$ 且 $v\mid f(m)$, 结合 $(u,v)=1$, 可得, $uv\mid f(m)$, 即 $m\mid f(m)$.

另一方面, 设 $f(t)=m$, 于是, 由于 $f(u)\mid f(t)$, 从而 $u\mid t$. 同理, $v\mid t$, 继而 $uv\mid t$, 即 $m\mid t$, 进而 $f(m)\mid f(t)$, 于是 $f(m)\mid m$. 于是, 可知 $f(m)=m$.

情况 3: $m>\sqrt{n}$ 且 m 至多有一个素因子.

由于 $m>\sqrt{n}$ 且 m 至多有一个素因子, 所以 m 必为素数的幂, 可设 $m=p^{\alpha}$, 其中 p 为素数, $p<\sqrt{n}$ 且 $\alpha\geq 2$ 为正整数. 则由归纳假设, $f(p^j)=p^j$ 对 $j=0,1,\cdots\alpha-1$ 均成立. 任取 $d\in S$, 可知

$$d\mid f(p^{\alpha})\Leftrightarrow f^{-1}(d)\mid p^{\alpha}\Leftrightarrow f^{-1}(d)=1,p,\cdots,p^{\alpha}\Leftrightarrow d=1,p,\cdots,p^{\alpha-1},f(p^{\alpha}).$$

因此, $f(p^{\alpha})$ 的真因子恰为 $1,p,\cdots,p^{\alpha-1}$. 由 $\alpha\geq 2$, 可知 $\frac{f(p^{\alpha})}{p}$ 是 $f(p^{\alpha})$ 的真因子, 可设 $\frac{f(p^{\alpha})}{p}=p^{\beta}$ $(\beta\in\{0,1,\cdots,\alpha-1\})$. 又 f 是单射, 所以, $f(p^{\alpha})=p^{\alpha}$.

综上所述, 若 $k\in S$ 的素因子均小于 $\sqrt{n}$, 则 $f(k)=k$. □

评注 这是一道中等难度的数论问题, 得分率为 43.83%. 本文给出的解答先证明整除关系在映射 f 下可以双向保持, 再对 k 进行归纳, 并根据 k 与 $\sqrt{n}$ 的大小关系以及 k 的素因子结构进行分类讨论. 不少同学能够找到可以推进证明的总体思路, 但在具体分类讨论的过程中出现条件遗漏、推理不充分或个别情形处理错误, 从而未能得到全部分数. 因此, 本题除要求找到合适的归纳与分类框架外, 对分类讨论的完整性和每一步推理的严谨性也有较高要求.

4. 给定正偶数 n, 设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$. 对 $1\leq i,j\leq n$, 记

$$D_{i,j}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max\{x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+j-1}\}-\min\{x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+j-1}\},$$

其中 $x_{n+k}=x_k$, $k=1,2,\cdots,n-1$. 求

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}D_{i,j}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的最小值.

解 S 的最小值为 $\frac{3}{2}n-1$.

先给出例子. 设 $n=2m$. 取

$$x_1=x_2=\cdots=x_m=\frac{1}{n},\ x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_{2m}=-\frac{1}{n}.$$

此时, 容易验证, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$. 而 $D_{i,j}$ 的取值要么为 0, 要么为 $\frac{2}{n}$. 其中, 使得 $D_{i,j}=0$ 的有序对 (i,j) 的个数等于 $x_i=x_{i+1}=\cdots=x_{i+j-1}$ 的个数, 即连续段落在常值块中的个数, 恰为 $2\cdot\frac{m(m+1)}{2}=m(m+1)$ 个. 从而,

$$S=(n^2-m(m+1))\cdot\frac{2}{n}=\frac{3}{2}n-1.$$

下面证明, 对任意满足题目要求的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 均有 $S\geq\frac{3}{2}n-1$.

将 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 依顺时针排在圆周上, 对 i 与 j, 记 $C_{i,j}$ 为从 x_i 顺时针到 x_j 的闭

圆弧上各数的极差, 特别的, $C_{i,i}=0$. 则

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1\le i,j\le n} C_{i,j} \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} (C_{i,j}+C_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} C_{i,i} \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} (C_{i,j}+C_{j,i}). \end{aligned}$$

记 $X=\max\limits_k x_k,\ x=\min\limits_k x_k$. 我们设 $C_{i,j}$ 与 $C_{j,i}$ 对应的圆弧的值域区间分别为 I 和 J. 由于这两个区间都包含元素 x_i 与 x_j, 故 $|I\cap J|\ge |x_i-x_j|$. 于是,

$$\begin{aligned} C_{i,j}+C_{j,i} &= |I|+|J| = |I\cup J|+|I\cap J| \\ &= (X-x)+|I\cap J| \ge (X-x)+|x_i-x_j|. \end{aligned}$$

于是

$$S \ge C_n^2(X-x) + \sum_{1\le i<j\le n} |x_i-x_j|.$$

下面, 我们对不等式的右边进行估计.

一方面, 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中, 正数与负数分别有 p 个和 q 个. 由题目条件易知 p 和 q 均为正整数且正数之和恰为 $\frac{1}{2}$, 负数之和恰为 $-\frac{1}{2}$. 从而, $X\ge\frac{1}{2p}$、$-x\ge\frac{1}{2q}$ 且 $p+q\le n$. 于是,

$$X-x \ge \frac{1}{2p}+\frac{1}{2q} \ge \frac{2}{p+q} \ge \frac{2}{n}.$$

另一方面, 对每个固定的 i, 我们有

$$\sum_{j=1}^{n} |x_i-x_j| \ge |\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)| = n|x_i|.$$

上式对 i 求和, 可得

$$2\sum_{1\le i<j\le n} |x_i-x_j| \ge n\sum_{i=1}^{n}|x_i| = n.$$

从而, 我们可得

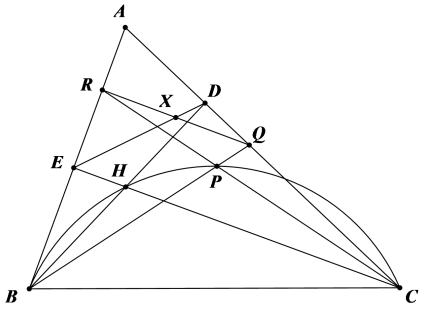
$$S \ge C_n^2\cdot\frac{2}{n}+\frac{n}{2} = \frac{3}{2}n-1.$$

综上所述, 所求的 S 的最小值为 $\frac{3}{2}n-1$. □

评注 这是一道较难的代数问题, 得分率为 18.62%. 本文给出的解答先给出达到最小值的构造, 再将原问题转化为圆周上若干连续段的极差之和, 通过将互补的两段配对, 把问题归结为对整体极差 $X-x$ 以及两两差的总和进行估计. 本题的主要困难在于如何从局部的极差条件中提取出可以整体求和的不等式, 不少同学能够得到部

分估计或给出等号成立的构造, 但在证明下界时缺少足够强的整体估计, 因而未能完成证明.

5. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H, B 到 AC 的垂足为 D, C 到 AB 的垂足为 E, $\triangle ABC$ 内异于 H 的点 P 在 $\triangle BHC$ 的外接圆上, 直线 BP 与 AC 交于点 Q, 直线 CP 与 AB 交于点 R. 证明: DE 平分线段 QR.



证明 设直线 DE 与直线 QR 交于点 X.

由 B、C、P、H 四点共圆, 可知, $\angle HBP = \angle HCP$, 结合 $\angle BDQ = 90^\circ = \angle CER$, 可得, $\triangle DBQ \backsim \triangle ECR$, 从而 $\frac{DQ}{ER} = \frac{BD}{CE}$. 因为, $\angle EAC = \angle DAB$ 且 $\angle ADB = 90^\circ = \angle AEC$, 所以, $\triangle ADB \backsim \triangle AEC$, 从而 $\frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE}$.

对 $\triangle AQR$ 及截线 DXE 使用梅涅劳斯定理, 可知, $\frac{AD}{DQ} \cdot \frac{QX}{XR} \cdot \frac{RE}{EA} = 1$.整理得 $\frac{RX}{XQ} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{RE}{QD} = 1$. 即 X 为 QR 中点.

综上所述, DE 平分线段 QR. □

评注 这是一道较为简单的平面几何问题, 得分率为 91.26%. 本文给出的解答利用垂心与垂足形成的直角关系以及圆周角关系得到两组相似三角形, 再通过梅涅劳斯定理完成证明. 本题的主要考查内容较为基础, 关键在于正确识别相似三角形及相应的比例关系, 因此绝大多数选手能够完整解决. 此外, 本题也可以采用多种计算方法处理, 通常都能够得到较为简洁的证明.

6. 设复数 z_1, z_2, z_3, z_4 满足

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0, \quad |z_i - \overline{z_j}| \leq 1 \ (1 \leq i, j \leq 4).$$

求 $|\sum\limits_{1 \leq i < j \leq 4} z_i z_j|$ 的最大值.

解 记 $S = \sum\limits_{k=1}^{4} |z_k|^2$.固定 i, 将四个不等式 $|z_i - \overline{z_j}|^2 \leq 1$ 对 j 求和. 由于

$$|z_i - \overline{z_j}|^2 = |z_i|^2 + |z_j|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_i z_j)$$

且 $\sum\limits_{j=1}^{4} z_j = 0$, 所以

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}|z_i - \overline{z_j}|^2 = |z_i|^2 + \frac{S}{4}.$$

左边不超过 1, 于是, $|z_i|^2 + \frac{S}{4} \leq 1$. 此时, 再对 $i = 1, 2, 3, 4$ 求和, 可得 $2S \leq 4$, 即 $S \leq 2$.

注意到, 由 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, 可得 $\sum\limits_{1\leq i<j\leq 4} z_i z_j = -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{4} z_i^2$.

于是,

$$\left|\sum_{1\leq i<j\leq 4} z_i z_j\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}|z_i|^2 = \frac{S}{2} \leq 1.$$

下证等号可以取得. 取 $a = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$, 并令 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (a, a, -a, -a)$. 此时, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, 且对任意 $1 \leq i, j \leq 4$, 均有 $|z_i - \overline{z_j}| = 1$. 同时,

$$\left|\sum_{1\leq i<j\leq 4} z_i z_j\right| = 2|a|^2 = 1.$$

从而, 所求最大值为 1. □

评注 这是一道中等难度的代数问题, 得分率为 46.36%. 本文给出的解答记 $S = \sum\limits_{k=1}^{4}|z_k|^2$, 并对固定的 i 将题设中的四个不等式求和, 利用 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 得到 S 的上界, 再由平方展开对所求式进行估计. 本题的关键在于对题设条件进行整体求和. 部分同学由于对复数相关运算较为陌生, 未能顺利展开证明; 另有一些同学将题设中的 $1 \leq i, j \leq 4$ 误读为 $1 \leq i < j \leq 4$, 这样实际上已经改变了题目的条件, 虽然所得问题仍然可以求解, 但其答案与原题并不相同.

7. 给定正整数 n. 在无限大的方格表上有 n^2 个方格, 两两没有公共顶点. 求与它们中至少一个有公共顶点的小方格 (不包括这 n^2 个) 的个数的最小值.

解 答案为 $3n^2 + 4n + 1$.

首先, 构造 $(2n+1)\times(2n+1)$ 的方格表, 取其中第 $2i$ 行第 $2j$ 列的方格 $(1 \leq i, j \leq n)$, 共 n^2 个, 它们两两没有公共顶点. 与它们中至少一个有公共顶点的方格恰为这个 $(2n+1)\times(2n+1)$ 的方格表中的其他方格, 共有

$$(2n+1)^2 - n^2 = 3n^2 + 4n + 1$$

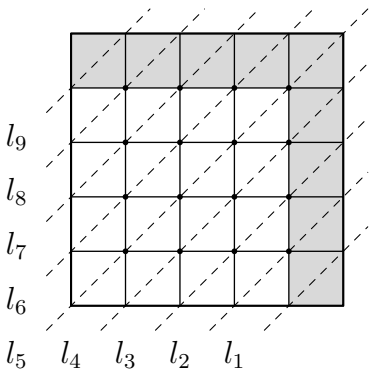
个. 从而, 所求最小值不超过 $3n^2 + 4n + 1$.

下面证明所求最小值不小于 $3n^2 + 4n + 1$. 由于每个给定的小方格有 4 个顶点, 且这些方格两两没有公共顶点, 所以它们的顶点共有 $4n^2$ 个. 我们证明, 含有这些顶

点中至少一个顶点的小方格至少有 $4n^2+4n+1$ 个, 从而除去原来的 n^2 个方格后, 还有至少 $3n^2+4n+1$ 个方格.

设这 $4n^2$ 个顶点构成集合 S, 至少一个顶点在 S 中的方格构成集合 T. 对每个 $v\in S$, 考虑以 v 为右上顶点的方格, 这些方格显然两两不同, 共有 $4n^2$ 个, 称它们为"好方格", 而 T 中除好方格以外的方格称为"坏方格". 我们只需证明至少有 $4n+1$ 个坏方格.

注意到, 每个好方格上方、右方以及右上方的方格均在 T 中. 将 T 中的方格按照斜率为 1 的方向分为若干条, 从下到上依次记为 $l_1,l_2,\ldots,l_t$. 则每条 l_i 上最右上方的方格均为坏方格. 如下图中, 中间的格点为 S 的元素, T 中的方格被分为了 $l_1,l_2,\ldots,l_9$, 阴影部分为坏方格.



设共有 k 个坏方格, 下证好方格至多有 $\left\lfloor\frac{(k-1)^2}{4}\right\rfloor$ 个.

设 $l_1,l_2,\ldots,l_t$ 上分别有 $c_1,c_2,\ldots,c_t$ 个坏方格.由于每条 l_i 上不可能有好方格而没有坏方格, 所以 $c_1,c_2,\ldots,c_t\geq 1$, 且

$$c_1+c_2+\cdots+c_t=k.$$

另一方面, l_i 上的每个好方格不断向上移动, 最终均会到达一个坏方格, 且这个坏方格位于某条 l_j 上, 其中 $j>i$.又因为 l_i 上的不同好方格横坐标不同, 所以对应的这些坏方格两两不同. 从而, l_i 上好方格的个数不超过

$$c_{i+1}+c_{i+2}+\cdots+c_t.$$

同理, l_i 上的每个好方格不断向右移动, 最终均会到达一个坏方格, 且这些坏方格两两不同, 并且均位于 $l_1,l_2,\ldots,l_{i-1}$ 上. 从而, l_i 上好方格的个数不超过

$$c_1+c_2+\cdots+c_{i-1}.$$

于是, 好方格的总数不超过

$$\sum_{i=2}^{t-1}\min\{c_1+c_2+\cdots+c_{i-1},\ c_{i+1}+c_{i+2}+\cdots+c_t\}.$$

由于 $c_i \geq 1$, 可知

$$c_{i+1} + c_{i+2} + \cdots + c_t \leq k - 1 - (c_1 + c_2 + \cdots + c_{i-1}).$$

因此, 好方格的总数不超过

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{t-1} \min\{c_1 + c_2 + \cdots + c_{i-1},\ k - 1 - (c_1 + c_2 + \cdots + c_{i-1})\} \\ \leq &\sum_{i=1}^{k-2} \min\{i, k-1-i\} = \left\lfloor \frac{(k-1)^2}{4} \right\rfloor. \end{aligned}$$

这里第二个不等号成立是因为 $c_1+c_2+\cdots+c_{i-1}(i=2,3,\ldots,t-1)$ 是 $\{1,2,\ldots,k-2\}$ 中若干个不同的整数, 将缺失的项补上后求和不会减小, 而最后一个等式分 k 的奇偶性讨论即可得到.

由于共有 $4n^2$ 个好方格, 所以

$$4n^2 \leq \left\lfloor \frac{(k-1)^2}{4} \right\rfloor,$$

从而 $k \geq 4n+1$. 因此, 坏方格至少有 $4n+1$ 个, 进而与原来的 n^2 个方格中至少一个有公共顶点的其他方格至少有 $3n^2+4n+1$ 个.

综上所述, 所求最小值为 $3n^2+4n+1$. □

评注 这是一道较难的组合问题, 得分率为 20.46%. 本文给出的解答先给出达到最小值的构造, 再将与所给方格有关的顶点和方格分别组成集合 S, T, 通过区分"好方格"与"坏方格", 并沿斜率为 1 的方向进行分组计数, 最终得到坏方格个数的下界. 不少同学能够得到正确的答案与构造, 但在下界的证明中出现了不同的问题: 有的解答通过逐层向外扩张进行计数, 却遗漏或错误处理了不同部分之间的重叠; 有的采用调整法, 但某些调整步骤并不能保证达到所需的状态; 也有同学对带孔的格点图形直接使用皮克定理, 超出了该定理通常形式的适用范围. 此外, 还有一些解答虽然证明了正确的中间结论, 但在后续计数中的不等式放缩出现错误, 从而未能完成证明.

8. 求最小的正整数 m, 使得存在由 m 个有序三元组 (i,j,k) 组成的集合 F, 同时满足以下条件:

(i) 对任意 $(i,j,k) \in F,\ i,j,k \in \{1,2,\cdots,100\}$ 且互不相同;

(ii) 对任意 100 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$, 若对所有 $(i,j,k) \in F$, 均有 $a_i \mid a_j + a_k$, 则 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 中至少有 99 个相等.

解 所求的正整数 m 的最小值为 2475.

先证明 $m \geq 2475$. 假设 $m < 2475$. 对每个 $(i,j,k) \in F$, 考虑二元集合 $\{i,j\}$ 与 $\{i,k\}$. 由于 $2m < 4950 = \mathrm{C}_{100}^2$, 所以必存在两个不同的下标 $s,t \in \{1,2,\ldots,100\}$, 使

得对任意 $(i,j,k)\in F$, 均有 $\{s,t\}\neq\{i,j\}$ 且 $\{s,t\}\neq\{i,k\}$.

此时, 令 $a_s=a_t=2$, 其余 $a_r=1$. 对任意 $(i,j,k)\in F$, 若 $i\notin\{s,t\}$, 则 $a_i=1$, 显然有 $a_i\mid a_j+a_k$; 若 $i\in\{s,t\}$, 则 j,k 均不等于 $\{s,t\}$ 中的另一个下标, 于是 $a_j=a_k=1$, 从而 $a_j+a_k=2$. 又 $a_i=2$, 故 $a_i\mid a_j+a_k$. 因此, 对所有 $(i,j,k)\in F$, 均有 $a_i\mid a_j+a_k$. 但此时 $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$ 中恰有 2 个数等于 2, 其余 98 个数等于 1, 不存在 99 个相等, 与题目条件矛盾. 从而 $m\geq 2475$.

下面证明上述下界可以达到, 即当 $m=2475$ 时, 存在满足题目条件的集合 F.此时, 对应的 F 按照如下构造: 我们将各下标均按照模 100 的意义理解, 并取为 $\{1,2,\ldots,100\}$ 中的数.

对任意 $1\leq i\leq 100$ 及 $1\leq t\leq 24$, 将 $(i,i+2t-1,i+2t)$ 加入 F, 这样共有 $100\times 24=2400$ 个有序三元组.

此外, 当 $i\equiv 1\pmod 4$ 时, 将 $(i,i-49,i+49)$ 加入 F; 当 $i\equiv 2,3\pmod 4$ 时, 将 $(i,i+49,i+50)$ 加入 F. 这两类分别有 25 个和 50 个有序三元组. 因此, 集合 F 中共有 $2400+25+50=2475$ 个有序三元组.

下面证明我们构造的集合 F 符合题意. 任取满足题目中所有整除条件的正整数 $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$. 记 $g=\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_{100})$, 并令 $b_i=\frac{a_i}{g}(1\leq i\leq 100)$. 于是, 对任意 $(i,j,k)\in F$, 仍有 $b_i\mid b_j+b_k$, 且 $\gcd(b_1,b_2,\ldots,b_{100})=1$.

先证明一个引理:

引理 若素数 p 同时整除两个不同的 b_i, 则 p 整除 $b_1,b_2,\ldots,b_{100}$ 中的每一个数.

证明 设 $p\mid b_i$ 且 $p\mid b_j$, 其中 $i\neq j$. 由于所有下标均按模 100 的意义理解, 不妨设 $j=i+d$, 其中 $1\leq d\leq 50$. 若 $d\leq 48$, 当 d 为奇数时, $(i,i+d,i+d+1)\in F$, 从而 $p\mid b_{i+d+1}$; 当 d 为偶数时, $(i,i+d-1,i+d)\in F$, 从而 $p\mid b_{i+d-1}$. 因此, 均可得到两个下标相邻的 b_r,b_{r+1} 同时被 p 整除. 此时, 由 $(r,r+1,r+2)\in F$ 可得 $p\mid b_{r+2}$, 结合数学归纳法, 易知 p 整除所有 b_i.

若 $d=49$, 当 $i\equiv 2,3\pmod 4$ 时, 由 $(i,i+49,i+50)\in F$, 可直接得到 $p\mid b_{i+50}$, 从而得到两个相邻的数同时被 p 整除. 当 $i\equiv 0,1\pmod 4$ 时, 利用形如 $(r,r-49,r+49)$ 的三元组, 其中 $r\equiv 1\pmod 4$, 可先得到两个下标的循环距离为 2 的数同时被 p 整除, 再利用前 2400 个三元组即可得到两个相邻的数同时被 p 整除. 因此, 此时仍可推出 p 整除所有 b_i.

若 $d=50$, 则 i 与 $i+50$ 中恰有一个下标模 4 余 2 或 3. 设这个下标为 r, 则 $(r,r+49,r+50)\in F$. 由于 $p\mid b_r$ 且 $p\mid b_{r+50}$, 可得 $p\mid b_{r+49}$, 于是再次得到两个相邻的数同时被 p 整除, 从而 p 整除所有 b_i. 引理获证.

回到原题, 由引理及 $\gcd(b_1, b_2, \ldots, b_{100}) = 1$, 可知任意两个不同的 b_i 互素. 下面证明 $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ 中至多有一个数大于 1.

假设至少有两个数大于 1. 由于它们两两互素, 所以至多有一个 b_i 为偶数, 从而必存在奇数 $b_r > 1$.取所有大于 1 的奇数 b_i 中最大的一个, 记为 b_r. 考虑 24 个三元组 $(r, r+2t-1, r+2t)(1 \leq t \leq 24)$. 由于至多有一个 b_i 为偶数, 所以其中至少存在一组, 使得 b_{r+2t-1} 与 b_{r+2t} 均为奇数. 记这两个数为 b_j, b_k. 由 $b_r \mid b_j + b_k$, 且 b_j, b_k 均为奇数并小于 b_r, 可知 $0 < b_j + b_k < 2b_r$. 于是 $b_j + b_k = b_r$, 但左边为偶数而右边为奇数, 矛盾.

因此, $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ 中至多有一个数大于 1, 从而其中至少有 99 个数等于 1. 于是 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 中至少有 99 个数等于 g, 故我们构造的集合 F 符合题意.

综上所述, 所求的正整数 m 的最小值为 2475. □

评注 这是一道难度较大的组合问题, 得分率为 3.37%. 本文给出的解答先通过构造特殊的 100 个正整数得到 m 的下界, 再给出一个恰含 2475 个有序三元组的集合 F, 并通过研究素因子在各个 b_i 之间的传递关系证明该构造满足题意. 本题真正困难的部分在于上界构造及其正确性的证明: 不仅需要设计出数量恰好达到下界的三元组, 还要证明这些三元组能够把局部的整除关系逐步传播到整体. 由于构造本身较为精细, 证明中又需要多次结合模 100 的下标关系进行讨论, 因此绝大多数同学未能完成本题. 此外, 题目中的 100 并非本质限制, 实际上可以推广到任意不小于 4 的正整数 n.